

Champs de vecteurs analytiques commutants, en dimension 3 ou 4: existence de zeros communs

Christian Bonatti

Abstract. One proves the existence of a common zero for any two \mathbb{R} -analytic commuting vector fields on a 4-dimensional manifold with not zero Euler characteristic. A local version of this result remains true on 3-manifolds.

Introduction

Le premier pas de l'étude d'un système dynamique est souvent la recherche des points fixes de ce système, ou de ses compacts invariants les plus simples.

Pour un système dynamique défini par l'itération d'un homéomorphisme, ou par le flot d'un champ de vecteurs (c'est-à-dire par une action du groupe \mathbb{Z} ou \mathbb{R}), on peut localiser les points fixes grâce à l'indice de Lefschetz ou de Poincaré-Hopf. Mais on ne dispose pas d'un tel outil permettant d'assurer l'existence de points fixes pour des actions de groupes non compacts autres que \mathbb{R} ou \mathbb{Z} .

On s'intéresse ici aux actions de \mathbb{R}^n sur une variété différentiable M , ou plus exactement aux champs de vecteurs commutants sur M : on dit que deux champs de vecteurs X_1, X_2 sur M commutent si leur crochet de Lie $[X_1, X_2]$ est identiquement nul sur M . Si X_1, \dots, X_n sont n champs commutants deux à deux sur M , et si leurs flots sont complets (par exemple si M est compacte), alors leurs flots définissent sur M une action de \mathbb{R}^n , dont les points fixes sont les zéros communs aux champs X_1, \dots, X_n .

En 1964, E. Lima (voir [L]) a prouvé l'existence de zéros communs pour tout n -uplet (X_1, \dots, X_n) de champs de vecteurs commutants sur une surface de caractéristique d'Euler non nulle. On se demande naturellement si ce résultat reste

vrai en dimension plus grande que 2.

Problème 1 (global). *Soit M une variété compacte de caractéristique d'Euler non nulle, et soient X_1, \dots, X_n n champs de vecteurs commutants sur M . Peut-on en déduire que X_1, \dots, X_n possèdent un zéro commun ?*

Sur les variétés de dimension impaire, le problème ci-dessus est vide puisque leur caractéristique d'Euler est nulle. Il y a cependant une version locale valable en toute dimension.

Problème 2 (local). *Soit M une variété et soient X_1, \dots, X_n n champs de vecteurs commutants sur M . Soit U un ouvert relativement compact de M tel que X_1 soit non nul sur le bord de U et tel que l'indice de X_1 sur U soit non nul.*

Ces hypothèses impliquent-elles que X_1, \dots, X_n possèdent un zéro commun dans U ?

(On rappelle que l'indice du champ X_1 sur U est le nombre d'intersection de la section du fibré tangent, définie par X_1 , avec la section nulle). Ce travail donne une réponse positive à ces questions pour les champs de vecteurs analytiques des variétés de dimension 3 ou 4.

Théorème principal. *Soit M une variété de dimension 3 ou 4 munie d'une structure analytique réelle, et soient X et Y deux champs de vecteurs analytiques commutants sur M . Soit U un ouvert relativement compact de M , tel que X soit non-nul sur le bord de U et que l'indice de X sur U soit non-nul.*

Alors X et Y possèdent un zéro commun dans U .

En dimension 4, en prenant $U = M$, on a la version globale de ce théorème:

Corollaire 1. *Soit M une variété de dimension 4, compacte, de caractéristique d'Euler non nulle, et munie d'une structure analytique réelle. Soient X et Y deux champs de vecteurs analytiques commutants sur M .*

Alors X et Y possèdent un zéro commun.

De plus, l'indice d'un champ est invariant par petite perturbation ; le théorème peut donc être utilisé comme critère de stabilité pour les zéros communs des champs commutants:

Corollaire 2. *Soient X et Y deux champs de vecteurs analytiques commutants d'une variété de dimension 3 ou 4, et soit p un zéro commun aux champs X et Y .*

Supposons qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ tel que p soit un zéro isolé d'indice non nul du champ $\alpha X + \beta Y$.

Alors pour tout couple (X_1, Y_1) de champs de vecteurs analytiques commutants, C^0 -proches des champs X et Y , il existe un point q proche de p qui est un zéro commun aux champs X_1 et Y_1 . (Autrement dit, p est un zéro commun stable par C^0 -perturbations analytiques).

Ces résultats amènent à poser quelques questions :

Question 1. *Le théorème est-il encore vrai sans l'hypothèse d'analyticité ?*

Je pense que l'étape essentielle pour supprimer l'hypothèse d'analyticité, serait de résoudre la question suivante:

Question 2. *Soient X et Y deux champs de vecteurs commutants d'une variété de dimension 3, et soit γ une orbite périodique régulière du champ Y , telle que γ soit un compact isolé de zéros du champ X .*

Les hypothèses impliquent-elles que l'indice de γ comme compact isolé de zéros de X est nul ?

La réponse positive à cette question, dans le cas où X et Y sont analytiques, est à l'origine de ce travail.

Question 3. *Le théorème est-il encore vrai en dimension plus grande que 4 ?*

(L'hypothèse sur la dimension a permis, dans ce travail, de choisir un champ dont l'ensemble des zéros est un ensemble analytique de dimension ≤ 2 , et donc d'utiliser la classification des surfaces. Bien qu'utilisée fortement, cette hypothèse ne me semble pas essentielle).

Question 4. *Le théorème est-il encore vrai pour n champs de vecteurs analytiques commutants?*

(On vérifie assez facilement que la réponse est positive en dimension 3, mais je n'ai pas réussi jusqu'à présent, à montrer le théorème pour 3 champs commutants en dimension 4)

D'autre part, le théorème de Lima sur l'existence de zéros communs pour les champs de vecteurs commutants des surfaces a été partiellement généralisé pour montrer l'existence de points fixes communs pour les difféomorphismes commutants des surfaces (voir [B1], [B2] et [H]).

Question 5. *Existe-t-il un résultat analogue à celui du théorème ci-dessus pour l'existence de points fixes communs pour des difféomorphismes analytiques commutants des variétés de dimension 3 ou 4 ?*

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du théorème principal. Dans le cas des variétés de dimension 3 la démonstration contient toute l'idée, et ne nécessite pas une formalisation excessive. Ce cas sera présenté de façon informelle, afin de bien dégager l'idée directrice, et de motiver la démonstration assez technique en dimension 4.

Ce travail doit beaucoup aux membres du laboratoire de topologie de l'université de Dijon, en particulier à : Rémi Langevin qui a accompagné et affirmé chaque étape de ce travail. Robert Moussu et Claude Roche qui m'ont apporté les connaissances nécessaires en géométrie analytique réelle, et qui ont trié, parmi les énoncés que je leur proposais, ceux qui semblaient raisonnables.

0. Rappels sur la notion d'indice

Soit M une variété différentiable, soit X un champ de vecteurs sur M , et soit U un ouvert relativement compact de M tel que X soit non nul sur le bord de U :

$$\text{Zéro}(X) \cap \partial U = \emptyset$$

Alors tout champ X' suffisamment C^0 – *proche* de X sera non nul sur le bord de U . De plus on peut choisir X' tel que $\text{Zéro}(X') \cap U$ soit fini.

On appelle *indice de X sur U* , noté $\text{ind}(X, U)$, la somme

$$\sum_{p \in \text{Zéro}(X') \cap U} \text{ind}(X', p),$$

où $\text{ind}(X', p)$ est l'indice de Poincaré-Hopf du zéro p de X' . C'est un entier indépendant du choix de X' proche de X .

Bien sûr pour tout champ X' proche de X on a :

$$\text{ind}(X', U) = \text{ind}(X, U)$$

Soit K un compact de M contenu dans l'ensemble $\text{Zéro}(X)$. On dit que K est un compact isolé de zéros de X s'il existe un voisinage ouvert U de K tel que l'on ait :

$$K = \text{Zéro}(X) \cap U$$

On peut bien sûr choisir U relativement compact dans M , et tel que X soit non nul sur le bord de U . On dit alors que U est un ouvert isolant pour K .

L'indice $\text{ind}(X, U)$ est indépendant de l'ouvert isolant U de K . On l'appelle

indice de X sur K et on le note $\text{ind}(X, K)$.

1. Deux champs de vecteurs sur une variété de dimension 3

Soit M une variété analytique réelle de dimension 3, et soient X et Y deux champs de vecteurs analytiques commutants sur M .

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant, qui est le contraposé du théorème principal.

Théorème 1. *Si K est un compact isolé de zéros de X ne contenant aucun zéro de Y , alors $\text{ind}(X, K)$ est nul.*

Comme M n'a pas été supposée compacte, quitte à remplacer M par une composante connexe de $M - \text{Zéro}(Y)$ on supposera désormais $\text{Zéro}(Y) = \emptyset$.

a) Un exemple simple

Remarque préliminaire. *L'ensemble $\text{Zéro}(X)$ est invariant par le flot de Y , car X et Y commutent. Le compact isolé K est donc invariant par le flot de Y , donc est une union d'orbites régulières complètes du flot de Y . Le cas le plus simple est donc celui où K est une orbite périodique de Y formée de zéros du champ X .*

Cette remarque est la motivation de l'exemple suivant qui est à la base de tout ce travail :

On suppose que K est un compact isolé de zéros de X , et que K est une orbite régulière périodique de Y .

On choisit un voisinage tubulaire isolant U de K sur lequel Y est non nul et on suppose que, pour tout $|\lambda| < \lambda_0$ l'ensemble $K_\lambda = \text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U$ est une orbite périodique régulière de Y , et que pour tout $|\lambda| \geq \lambda_0$, K_λ est vide.

On suppose enfin que l'union $\bigcup_{\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[} K_\lambda$ forme une couronne (lisse) dans U , qui est égale à $S \cap U$ où S est l'ensemble des points de M où X et Y sont colinéaires.

Le but de ce paragraphe est de montrer:

Lemme 1.a.1. *Avec les notations ci-dessus on a :*

$$\text{ind}(X, U) = \text{ind}(X, K) = 0$$

Pour montrer ce lemme, nous allons d'abord montrer :

Lemme 1.a.2. *Il existe un ensemble fini $\Lambda \subset]\lambda_0, \lambda_0[$ de valeurs de λ tel que*

le champ de 2-plans $P(X, Y)$ engendré par X et Y sur $U - S$ se prolonge par continuité sur $U - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$.

Nous montrerons alors :

Lemme 1.a.3. *Pour tout $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[- \Lambda$, on a :*

$$\text{ind}(X + \lambda Y, U) = \text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = 0.$$

Comme Λ est fini, on aura montré que, pour tout $\lambda \neq 0$ assez petit, $\text{ind}(X + \lambda Y, U) = 0$. Or pour tout λ assez petit, $\text{ind}(X, U) = \text{ind}(X + \lambda Y, U)$: le lemme 1.a.1 sera démontré.

Démonstration du lemme 1.a.2. Munissons M d'une métrique riemannienne analytique (une telle métrique existe d'après un théorème de Grauert [G]) et notons τ le champ de 2-plans orthogonal à Y (Y est non nul sur M).

Notons X/Y le champ de vecteurs analytique sur M défini en projetant le champ X sur τ parallèlement à Y . Ce champ a les propriétés suivantes :

- Zéro (X/Y) = S (ensemble où X et Y sont colinéaires). - le champ de plans engendré par X/Y et Y sur $M - S$ est égal au champ de plans $P(X, Y)$ engendré par X et Y .

Comme X/Y est analytique, quitte à diviser localement par une équation définissant $S = \text{Zéro}(X/Y)$, on voit que le champ de droites engendré par X/Y sur $M - S$ se prolonge par continuité hors d'un ensemble analytique $A \subset S$ de dimension 1. On en déduit que le champ de plan $P(X, Y)$ (engendré par X/Y et Y), se prolonge par continuité sur $M - A$. D'autre part comme X et Y commutent, le champ de plans $P(X, Y)$ est invariant par le flot de Y . Donc A est invariant par le flot de Y . On en déduit facilement que $A \cap U$ est une union $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, d'où $\Lambda \subset]-\lambda_0, \lambda_0[$ est fini, ce qui achève la démonstration du lemme a-2.

Démonstration du lemme 1.a.3. Soit $\lambda_1 \notin \Lambda$ et soit U_{λ_1} un petit voisinage de K_{λ_1} tel que le champ de plan $P(X, Y)$ se prolonge par continuité en un champ de plans P sur tout U_{λ_1} . Supposons d'abord que P soit transversalement orienté. Alors, notons Z un champ de vecteurs unitaires orthogonal à P : c'est un champ nul part colinéaire à $X + \lambda_1 Y$ sur $U_{\lambda_1} - K_{\lambda_1}$. Choisissons φ une fonction continue de U_{λ_1} dans $[0, 1]$ égale à 1 sur K_{λ_1} et égale à 0 au voisinage du bord de U_{λ_1} . Alors $X + \lambda_1 Y + \varphi Z$ est un champ de vecteurs non nul sur U_{λ_1} et coïncidant avec $X + \lambda_1 Y$ au voisinage du bord de U_{λ_1} . Ceci prouve que l'indice $\text{ind}(X + \lambda_1 Y, K_{\lambda_1}) = \text{ind}(X + \lambda_1 Y, U_{\lambda_1})$ est nul. Si P n'est pas transversalement orienté, il suffit de prendre le revêtement à 2 feuillets des orientations transverses

de P au dessus de $U - \bigcup_{\lambda \in \Delta} K_\lambda$. On note alors $\tilde{K}, \tilde{Y}, \tilde{K}_{\lambda_1}, \tilde{P}, \tilde{U}_{\lambda_1}$ les relevés de $X, Y, K_{\lambda_1}, P, U_{\lambda_1}$ sur ce revêtement. Le raisonnement ci-dessus montre alors:

$$\text{ind}(X + \lambda_1 Y, K_{\lambda_1}) = \frac{1}{2} \text{ind}(\tilde{X} + \lambda_1 \tilde{Y}, \tilde{K}_{\lambda_1}) = 0$$

Le lemme a-3 est donc démontré.

b) Cas général

On cherche à se ramener à l'exemple étudié au paragraphe a, en changeant X en $X + \lambda Y$ pour un λ bien choisi. Rappelons les hypothèses :

M est une variété analytique connexe. Les champs de vecteurs X et Y sont analytiques et ils commutent sur M . De plus (quitte à changer M par une composante connexe de M -Zéro Y) Y est non nul sur M ; K est un compact isolé de zéros de X et U est un ouvert isolant de K .

On veut montrer $\text{ind}(X, K) = 0$. Notons S l'ensemble des points de M où X et Y sont colinéaires. C'est un sous-ensemble analytique de M . Si $\dim S = 3$ alors X et Y sont colinéaires sur M (c'est-à-dire $S = M$). C'est un cas "dégénéré" qui sera traité au paragraphe c.

Nous supposons désormais que $\dim S \leq 2$. Comme X et Y commutent, l'ensemble S est invariant par le flot de toute combinaison linéaire $\alpha X + \beta Y$. De plus on a : $S = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{Zéro}(X + \lambda Y)$.

Fixons $\lambda_0 > 0$ un réel assez petit pour que, pour tout $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$ le champ $X + \lambda Y$ soit non nul sur le bord de U et que $\text{ind}(X + \lambda Y, U) = \text{ind}(X, U)$. On note, pour $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, $K_\lambda = \text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U$.

Le lemme suivant va permettre de ramener le cas général à l'exemple étudié au paragraphe 1.a :

Lemme 1.b-1. *Il existe un ensemble fini $\Lambda \subset [-\lambda_0, \lambda_0]$ tel que l'on ait les propriétés suivante :*

- $\bigcup_{\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0] - \Lambda} K_\lambda$ est formé d'un nombre fini de couronnes lisses (difféomorphes à $] -1, 1[\times S^1$).
- l'intersection de K_λ avec chacune de ces couronnes est formée d'au plus une orbite périodique régulière de Y .

Démonstration. Fixons une métrique riemannienne analytique sur M , et notons \langle, \rangle le produit scalaire associé. Notons $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction analytique définie

par :

$$f(p) = - \frac{\langle X(p), Y(p) \rangle}{\langle Y(p), Y(p) \rangle}$$

La fonction f n'est pas a priori invariante par le flot de Y ; cependant sa restriction $f|_S$ à S est invariante par le flot de Y . En effet pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$f^{-1}(\lambda) \cap S = \text{Zéro}(X + \lambda Y)$$

En particulier, si $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, $K_\lambda = f^{-1}(\lambda) \cap S \cap U$.

L'ensemble S est un sous-ensemble analytique de M de dimension 2, invariant par le flot de Y . Dans chaque "flow-box" de Y , c'est-à-dire dans un ouvert de H difféomorphe à $D^2 \times [-t_0, t_0]$, $t_0 > 0$, où Y est analytiquement conjugué à $\frac{\partial}{\partial t}$, S est le produit par $[-t_0, t_0]$ d'un sous-ensemble analytique de D^2 . Notons S_1 l'ensemble des points de S au voisinage desquels S n'est pas une surface lisse. En regardant l'intersection de S_1 avec les "flow-box" de Y on voit que S_1 est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de M . De plus, on a une stratification de S , vérifiant les conditions a et b de Whitney (ces conditions se vérifiant aisément dans chaque flow-box de Y), définie de la façon suivante :

- une strate de dimension 2 est une composante connexe de $S - S_1$.
- une strate de dimension 1 est une composante connexe de S_1 (chacune de ces strates est une orbite de Y).

Alors, d'après le théorème de transversalité de Thom (voir [M]), il existe un ensemble fini $\Lambda \subset [-\lambda_0, \lambda_0]$ tel que, pour tout $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0] - \Lambda$, on ait :

- l'application f est une submersion au voisinage de $f^{-1}(\lambda) \cap \bar{U}$.
- la fibre $f^{-1}(\lambda)$ est transverse à toute strate (de la stratification de S définie ci-dessus) en tout point de $S \cap \bar{U}$, (donc $f^{-1}(\lambda)$ est disjoint de S_1 , car f est constante sur chaque strate de S_1).

Donc, pour tout $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0] - \Lambda$, $K_\lambda = f^{-1}(\lambda) \cap S \cap U$ est un sous-ensemble analytique de M composé d'un nombre fini d'orbites périodiques de Y contenues dans les strates de dimension 2, et $\bigcup_{\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0] - \Lambda} K_\lambda$ est formé d'un nombre fini de couronnes lisses disjointes, feuilletées trivialement en cercles par les K_λ , et sur lesquelles la fonction f est "transversalement monotone" car elle est sans point critique. Donc chacune de ces couronnes contient au plus une composante connexe de K_λ . Le lemme 1.b.1 est donc démontré.

Voyons maintenant comment conclure la démonstration du théorème 1, dans le cas où $\dim S \leq 2$. Soit $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0] - \Lambda$ assez proche de 0 pour que l'on

ait :

$$\text{ind}(X, U) = \text{ind}(X + \lambda Y, U).$$

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les composantes connexes de K_λ . On a bien sûr:

$$\text{ind}(X + \lambda Y, U) = \sum_i \text{ind}(X + \lambda Y, \gamma_i).$$

Soit γ une composante connexe de K_λ . Alors, d'après le lemme 1.b.1, γ est une orbite périodique de $X + \lambda Y$, de plus on peut choisir un voisinage V de γ et un réel $u_0 > 0$ tel que $S \cap V$ soit une couronne lisse formée d'orbites périodiques de Y , chacune étant égale à l'intersection $K_{\lambda+u} \cap V$, où $u \in]-u_0, u_0[$. D'après le lemme 1.a.1 on a alors:

$$\text{ind}(X + \lambda Y, \gamma) = 0$$

On en déduit immédiatement:

$$\text{ind}(X, K) = 0.$$

Il reste donc à voir le cas dégénéré où $\dim S = 3$.

c) Cas où $\dim S = \dim M$

Le cas de deux champs colinéaires commutants peut se traiter indépendamment de la dimension de M . Nous le ferons donc. Soit M une variété analytique connexe, et soient X et Y deux champs de vecteurs analytiques partout colinéaires sur M , et commutants. Supposons de plus que Y soit non nul sur M . Soit K un compact isolé de zéros de X , et U un ouvert isolant de K . Le but de ce paragraphe est de démontrer le lemme suivant qui, dans le cas où M est de dimension 3, achève la preuve du théorème 1.

Lemme 1.c.1. *Avec les hypothèses ci-dessus, on a $\text{ind}(X, K) = 0$.*

Démonstration. Notons $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction analytique définie par $X + fY = 0$. Cette fonction est constante sur les orbites de Y , car X et Y commutent. Pour tout λ , $f^{-1}(\lambda)$ est l'ensemble des zéros de $X + \lambda Y$, et donc $K_\lambda = f^{-1}(\lambda) \cap U$.

Notons Λ l'ensemble des valeurs critiques de f sur l'adhérence \bar{U} de U . De la compacité de \bar{U} et de l'analyticité de f on déduit que Λ est fini. Pour tout $\lambda \notin \Lambda$ assez petit, K_λ est formé d'une union finie d'hypersurfaces compactes lisses ne rencontrant pas le bord de U . De plus Y est un champ de vecteurs non nul tangent à K_λ . On en déduit que chaque composante connexe de K_λ est de caractéristiques d'Euler nulle. Fixons $\lambda_0 \notin \Lambda$ assez petit pour que $\text{ind}(X + \lambda_0 Y, K_{\lambda_0}) =$

$\text{ind}(X, U)$. Chaque composante connexe de K_{λ_0} possède un voisinage tubulaire feuilleté trivialement (par produit) par les K_λ , λ proche de λ_0 . Le champ $X + \lambda_0 Y$ est tangent aux K_λ (et colinéaire à Y), et non nul pour $\lambda \neq \lambda_0$. Notons Z le gradient de la fonction f (pour une métrique riemannienne en M), et notons φ une fonction de M dans $[0, 1]$ égale à 1 sur K_{λ_0} et nulle hors d'un "très petit" voisinage de K_{λ_0} . Alors $X + \lambda_0 Y + \varphi Z$ est un champ de vecteurs coïncidant avec $X + \lambda_0 Y$ hors d'un petit voisinage de K_{λ_0} , et n'ayant aucun zéro dans U . On en déduit que $\text{ind}(X + \lambda_0 Y, K_{\lambda_0}) = 0$, et donc $\text{ind}(X, K) = 0$.

Le théorème 1 est donc démontré, et donc aussi le théorème principal pour 2 champs de vecteurs en dimension 3.

2. Deux champs commutants en dimension 4

Nous allons maintenant prouver, pour des variétés de dimension 4, les mêmes résultats que nous venons de voir en dimension 3.

Théorème 2. *Soit M une variété analytique réelle de dimension 4, et soient X et Y deux champs de vecteurs analytiques commutants sur M .*

Alors, si $K \subset M$ est un compact isolé de zéros de X ne contenant aucun zéro de Y , son indice $\text{ind}(X, K)$ est nul.

Le reste de cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 2. Le paragraphe b) présente un outil essentiel contenant l'information sur la limite, quand on approche du lieu de colinéarité des champs X et Y , du champ de 2-plans engendré par X et Y . Les paragraphes c, d et e présenteront les exemples où le compact K est le plus "typique" : ces exemples sont la clef de la démonstration. Le paragraphe f montrera alors que le cas général peut se ramener à ces exemples.

a) Notations, préliminaires

De même qu'en dimension 3, quitte à remplacer M par une composante connexe de M -Zéro (Y), nous supposons désormais $\text{Zéro}(Y) = \emptyset$. On note S l'ensemble des points de M où X et Y sont colinéaires. C'est un sous-ensemble analytique de M . On a bien sûr : $S = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{Zéro}(X + \lambda Y)$. Comme X et Y commutent, les ensembles $\text{Zéro}(X + \lambda Y)$ sont tous invariants par les flots de X et de Y ; l'ensemble S est donc lui aussi invariant par ces flots. Le cas où la dimension de S est égale à celle de M a déjà été traité au paragraphe 1.c; on supposera désormais : $\dim S \leq 3$. Fixons un ouvert U relativement compact dans M , qui est un ouvert isolant du compact isolé K de zéros de X . Il existe alors un

réel $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, le champ $X + \lambda Y$ soit non nul sur le bord de U et que l'on ait : $\text{ind}(X + \lambda Y, U) = \text{ind}(X, U) = \text{ind}(X, K)$. On note alors, pour tout $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, $K_\lambda = \text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U$. C'est un sous-ensemble analytique de M , compact, contenu dans U , et invariant par les flots de X et Y .

Fixons une métrique analytique sur M (une telle métrique existe, d'après un théorème de Grauert [G]), et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé. On note f la fonction analytique définie sur M par :

$$f(p) = -\frac{\langle X(p), Y(p) \rangle}{\langle Y(p), Y(p) \rangle}$$

Bien sûr, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\text{Zéro}(X + \lambda Y) = f^{-1}(\lambda) \cap S$$

Remarquons que f n'est pas a priori invariante par le flot de Y , mais sa restriction $f|_S$ à S est constante sur chaque orbite de Y . On note N le sous-fibré vectoriel de TM , orthogonal au champ de vecteurs Y . C'est un fibré vectoriel analytique sur M , de fibre \mathbb{R}^3 . On notera PN le fibré sur M dont la fibre $(PN)_p$ en un point $p \in M$ est l'espace projectif de la fibre $(N)_p$ de N au point p . C'est un fibré analytique sur M de fibre \mathbb{RP}^2 . On note X/Y la projection du champ de vecteurs X sur le champ d'hyperplans N , parallèlement à Y . Remarquons que le flot du champ Y agit sur N (par "holonomie linéaire"). La commutation des champs X et Y entraîne que X/Y est invariant par l'action du flot de Y sur N . D'autre part, X/Y est un champ de vecteurs analytique sur M , dont l'ensemble des zéros est égal à S .

b) L'ensemble des directions limites du champ X/Y

Le champ de vecteurs X/Y est non-nul sur $M - S$. Il définit donc, au dessus de $M - S$, une section du fibré PN . On appelle ensemble des directions limites de X/Y l'adhérence dans PN de l'image de cette section. On la note $DL(X/Y)$.

Lemme 2.b.1. *L'ensemble $DL(X/Y)$ est un sous-ensemble semi-analytique de PN , invariant par l'action du flot de Y sur PN .*

Démonstration. Considérons le sous-ensemble \mathcal{E} de PN , dont les points dans la fibre $(PN)_p$ au dessus de $p \in M$, sont les droites qui contiennent le vecteur $X/Y(p)$. On voit facilement que \mathcal{E} est analytique. D'autre part l'intersection de \mathcal{E} avec la restriction $PN|_{M-S}$ est exactement l'image de la section définie

par X/Y . Cette image est donc un sous-ensemble semi-analytique de PN (car S est analytique). L'adhérence d'un semi-analytique est un semi-analytique (voir [B.M]), donc $DL(X/Y)$ est un sous-ensemble semi-analytique de PN . L'invariance de $DL(X/Y)$ par l'action du flot de Y est conséquence simple de la commutation de X et de Y .

Notation. Pour toute partie $E \subset M$ on notera $DL(X/Y, E)$ la partie de $DL(X/Y)$ au dessus de E :

$$DL(X/Y, E) = DL(X/Y) \cap (PN|_E)$$

Remarque 2.b.2. La dimension $\dim(DL(X/Y, M-S))$ est 4, car $DL(X/Y, M-S)$ est défini par une section. On en déduit : $\dim(DL(X/Y)) = 4$. D'autre part $DL(X/Y, S)$ est le bord de $DL(X/Y, M-S)$; on en déduit $\dim(DL(X/Y, S)) \leq 3$ (voir[B.M]).

Lemme 2.b.3. Soit $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$. S'il existe une section continue $s : K_\lambda \rightarrow PN|_{K_\lambda}$ dont l'image est disjointe de $DL(X/Y, K_\lambda)$, alors on a :

$$\text{ind}(X, K) = \text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = 0$$

Démonstration. (elle est identique à celle du lemme 1.a.3). La section s est un champ de droites sur K_λ , orthogonal au champ Y . On peut l'étendre en un champ de droites continu \bar{s} défini sur un petit voisinage U_λ de K_λ . Comme la section s est disjointe de $DL(X/Y, K_\lambda)$, quitte à restreindre le voisinage U_λ on peut supposer que \bar{s} est disjointe de $DL(X/Y)$: c'est donc un champ de droites nul part colinéaire à X sur $U_\lambda - K_\lambda$.

- supposons que le champ de droites \bar{s} soit orientable. Notons Z un champ de vecteurs unitaire sur U_λ dirigeant \bar{s} . Notons φ une fonction continue de U_λ dans $[0, 1]$ égale à 1 sur K_λ et à 0 au voisinage du bord de U_λ . Alors $X + \lambda Y + \varphi Z$ est un champ de vecteurs non nul sur U_λ , et coïncidant avec $X + \lambda Y$ sur le bord de U_λ .

Ceci prouve $\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = \text{ind}(X + \lambda Y, U_\lambda) = 0$.

- si le champ de droites \bar{s} n'est pas orienté il suffit de prendre le revêtement à 2 feuillets \tilde{U}_λ des orientations de \bar{s} sur U_λ . Notons $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{K}_\lambda, \tilde{s}$ les relevés de X, Y, K_λ, \bar{s} sur ce revêtement. Le raisonnement ci-dessus montre alors :

$$\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = \frac{1}{2} \text{ind}(\tilde{X} + \lambda \tilde{Y}, \tilde{K}_\lambda) = 0$$

Le lemme 2.b.3 est donc démontré.

Nous utiliserons souvent le lemme 2.b.3 "à un revêtement fini près", c'est-à-dire sous la forme suivante :

Soit \tilde{K}_λ un revêtement fini à n feuillets, $n \in \mathbb{N}$, de K_λ , pour un $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$ fixé. Le fibré $PN|_{K_\lambda} \rightarrow K_\lambda$ définit naturellement un fibré $P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$ de base \tilde{K}_λ , muni d'une projection qui en fait un revêtement à n feuillets de $PN|_{K_\lambda}$, et rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda} & \rightarrow & PN|_{K_\lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{K}_\lambda & \rightarrow & K_\lambda \end{array}$$

On note $\tilde{DL}(X/Y, \tilde{K}_\lambda)$ le relevé de $DL(X/Y, K_\lambda)$ dans $(P\tilde{N})_{\tilde{K}_\lambda}$. On a alors :

Lemme 2.b.4. *S'il existe une section continue $s : \tilde{K}_\lambda \rightarrow P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$ dont l'image est disjointe de $\tilde{DL}(X/Y, \tilde{K}_\lambda)$, alors on a : $\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = 0$.*

Démonstration. Soit V_λ un voisinage de K_λ muni d'une rétraction sur K_λ (un tel voisinage existe car K_λ est analytique). Le revêtement \tilde{K}_λ de K_λ se prolonge alors en un revêtement à n feuillets $\tilde{V}_\lambda \rightarrow V_\lambda$, et \tilde{V}_λ hérite de la structure de variété analytique de V_λ . On note \tilde{X} et \tilde{Y} les relevés des champs X et Y sur \tilde{V}_λ . Ce sont des champs analytiques commutants sur \tilde{V}_λ , et l'on a :

$$\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = \frac{1}{n} \text{ind}(\tilde{X} + \lambda \tilde{Y}, \tilde{K}_\lambda).$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.b.3 au champ $\tilde{X} + \lambda \tilde{Y}$, ce qui conclut.

c) Exemple 1 : $\dim K = 1$

Faisons les hypothèses suivantes :

- le compact isolé K de zéros de X est une orbite régulière périodique de Y .
- l'ouvert isolant U est un voisinage tubulaire de K .
- pour tout $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, $K_\lambda = \text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U$ est une orbite régulière périodique de Y .
- pour tout $\lambda \notin]-\lambda_0, \lambda_0[$, $\text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U = \emptyset$
- l'union $\bigcup_\lambda K_\lambda = S \cap U$ est une couronne lisse (difféomorphe à $]-\lambda_0, \lambda_0[\times S^1$).

Le but de ce paragraphe est de prouver le lemme suivant :

Lemme 2.c.1. *Il existe $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$ aussi petit que l'on veut, tel que $\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = 0$, et donc $\text{ind}(X, K) = 0$.*

Démonstration. On a vu que $\dim(DL(X/Y, S)) \leq 3$. On en déduit que l'ensemble Σ , des points $p \in S$ tels que $DL(X/Y, p) > 1$, est un sous-ensemble sous-analytique de dimension $\dim \Sigma \leq 1$ (voir [B-M] paragraphe 3). D'autre part, $DL(X/Y, S)$ est invariant par le flot de Y , donc Σ est invariant par le flot de Y , (dont les orbites sont les K_λ) : on en déduit qu'il existe un sous-ensemble fini $\Lambda \subset]-\lambda_0, \lambda_0[$ tel que, pour tout $p \in \bigcup_{\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[- \Lambda} K_\lambda$, on a : $\dim DL(X/Y, p) \leq 1$.

Fixons donc $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[- \Lambda$, et $p \in K_\lambda$. Notons L l'application linéaire bijective de N_p correspondant à la partie linéaire de l'application de Poincaré du champ Y , le long de K_λ (qui est une orbite périodique de Y) sur une transversale de Y , orthogonale en p à Y . L'application L agit naturellement sur la fibre $(PN)_p$ et laisse invariant $DL(X/Y, p)$.

Comme $DL(X/Y, p)$ est un sous-ensemble semi-analytique de $(PN)_p$, son complémentaire $(PN)_p - DL(X/Y, p)$ a un nombre fini de composantes connexes. On en déduit qu'il existe $n \in N - \{0\}$ tel que la composée L^n laisse invariante chaque composante connexe de $(PN)_p - DL(X/Y, p)$.

Notons $\tilde{K}_\lambda, (P\tilde{N})|_{\tilde{K}_\lambda}, \tilde{DL}(X/Y, \tilde{K}_\lambda)$ les revêtements cycliques à n feuillets de $K_\lambda, PN|_{K_\lambda}, DL(X/Y, K_\lambda)$ (Bien sûr $\tilde{DL}(X/Y, \tilde{K}_\lambda)$ est un sous-ensemble semi-analytique du fibré $P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$ de fibre \mathbb{RP}^2 et de base \tilde{K}_λ).

On montre alors facilement que l'indice $\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda)$ est nul (ce qui conclut la démonstration du lemme 2.c.1) en appliquant le lemme 2.b.4 et le lemme suivant :

Lemme 2.c.2. *Il existe une section $s : \tilde{K}_\lambda \rightarrow P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$ d'image disjointe de $\tilde{DL}(X/Y, \tilde{K}_\lambda)$.*

Démonstration. De même que dans la démonstration du lemme 2.b.4, on étend le revêtement \tilde{K}_λ en un revêtement \tilde{U}_λ d'un voisinage U_λ de K_λ , et on note \tilde{X}, \tilde{Y} les relevés sur \tilde{U}_λ des champs X et Y . L'holonomie linéaire de \tilde{Y} agit alors sur $P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$ en laissant invariant $\tilde{DL}(X/Y, \tilde{K}_\lambda) = DL(\tilde{X}/\tilde{Y}, \tilde{K}_\lambda)$.

D'autre part, par définition de n , l'holonomie linéaire \tilde{L} de \tilde{Y} laisse invariante chaque composante connexe de $P\tilde{N}|_{\tilde{p}} - DL(\tilde{X}/\tilde{Y}, \tilde{p})$, où \tilde{p} est un relevé sur \tilde{K}_λ du point p .

Fixons α un point de $P\tilde{N}|_{\tilde{p}} - DL(\tilde{X}/\tilde{Y}, \tilde{p})$. Notons γ_0 le chemin joignant

α à $\tilde{L}(\alpha)$, obtenu en poussant α sur les fibres de $P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$ par holonomie linéaire de \tilde{K} . C'est un chemin transverse aux fibres de $P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$, et disjoint de $DL(\tilde{X}/\tilde{Y}, \tilde{K}_\lambda)$. De plus $\tilde{L}(\alpha)$ et α sont dans la même composante connexe de $P\tilde{N}|_{\tilde{p}} - DL(\tilde{X}/\tilde{Y}, \tilde{p})$, ce qui permet de joindre $\tilde{L}(\alpha)$ à α par un chemin, dans la fibre $P\tilde{N}|_{\tilde{p}}$, et disjoint de $DL(\tilde{X}/\tilde{Y}, \tilde{p})$.

On obtient sans peine la section s annoncée en perturbant le lacet $\gamma_0.\gamma_1$ (de façon à le rendre transverse aux fibres de $P\tilde{N}|_{\tilde{K}_\lambda}$).

d) Exemple 2 : $\dim K=2$, le cas idéal

Supposons à présent que l'on ait les hypothèses suivantes :

- le compact isolé K de zéros de X est un tore T^2 lisse.
- l'ouvert isolant U est un voisinage tubulaire de K .
- pour tout $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, $K_\lambda = \text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U$ est un tore T^2 lisse, et $\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = \text{ind}(X, K)$.
- pour tout $\lambda \notin]-\lambda_0, \lambda_0[$, $\text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U = \emptyset$.
- l'union $\bigcup_\lambda K_\lambda = S \cap U$ est une sous-variété analytique lisse de M diffeomorphe à $T^2 \times]-\lambda_0, \lambda_0[$, transversalement orientable, et feuilletée trivialement par les K_λ .

On suppose de plus :

- $DL(X/Y)$ est défini sur U (même sur $S \cap U$) par une section analytique $\sigma : U \rightarrow PN|_U$.

Le but de ce paragraphe est de prouver le lemme suivant :

Lemme 2.d.1. *Avec les hypothèses ci-dessus, on a :*

$$\text{ind}(X, K) = 0.$$

Pour prouver ce lemme, nous allons choisir une trivialisation de l'espace tangent à M , $TM|_K$. Dans cette trivialisation, on peut considérer la restriction $\sigma|_K$ comme une fonction $\sigma|_K : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$. Nous montrerons que cette fonction n'est pas surjective. On en déduira qu'il existe une section $s : K \rightarrow PN|_K$ disjointe de s donc de $DL(X/Y, K)$; on conclura par le lemme 2.b.3.

Démonstration. On choisit 3 champs de vecteurs Z_1, Z_2, Z_3 , tangents à M , définis sur K , de la façon suivante :

En tout point $p \in K$, $Z_1(p)$ est un vecteur unitaire tangent au tore K , et orthogonal à Y , $Z_2(p)$ est un vecteur unitaire tangent à S et orthogonal au plan engendré par $Y(p)$ et $Z_1(p)$, et $Z_3(p)$ est un vecteur unitaire orthogonal à S . Les

champs Z_1, Z_2, Z_3 ainsi définis sur K sont analytiques. De plus, en tout point $p \in K$, $(Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p))$ est une base de la fibre N_p du fibré normal au champ Y ; (Z_1, Z_2, Z_3) représentent donc une trivialisatıon de $N|_K$, et induisent donc un isomorphisme du fibré $PN|_K$ sur $K \times \mathbb{RP}^2$.

La section σ induit donc une application analytique (encore notée σ) $\sigma : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$.

Notons 0 le point de \mathbb{RP}^2 correspondant à la droite engendrée par le vecteur Z_1 , et C le cercle $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$ correspondant au plan engendré par Z_1 et Z_2 .

Remarquons les équivalences suivante :

$\sigma(p) = 0 \Leftrightarrow$ la direction limite en p du champ X/Y est tangente à K .

$\sigma(p) \in C \Leftrightarrow$ la direction limite en p du champ X/Y est tangente à S .

D'autre part, le fibré tangent à K et le fibré tangent à S sont invariants par le flot de Y .

On en déduit facilement que $\sigma^{-1}(0)$ et $\sigma^{-1}(C)$ sont des sous-ensembles analytiques (compacts) de K , invariants par le flot de Y . On a alors :

- si $\dim \sigma^{-1}(C) = 2$ alors $\sigma(K) \subset C$ donc σ n'est pas surjective.

- si $\dim \sigma^{-1}(C) = 1$ alors $\sigma^{-1}(C)$ est formé d'un nombre fini d'orbites périodiques de Y . Soit γ une telle orbite. Alors $\sigma(\gamma)$ est un compact de C . Comme γ et $\sigma^{-1}(0)$ sont invariants par le flot de Y , si $\sigma(\gamma)$ contient 0 , il est réduit à 0 . On en déduit facilement que tout point de C , différent de 0 mais assez proche de 0 est hors de l'image de σ . Donc σ n'est pas surjective.

Notons $s : K \rightarrow \mathbb{RP}^2$ une application constante dont la valeur est au dehors de l'image de σ . Alors s définit une section (notée encore s) du fibré $PN|_K$, disjointe de la section σ . D'après le lemme 2.b.3, on peut conclure : $\text{ind}(X, K) = 0$.

e) Exemple 3 : $\dim K=2$, un cas "typique"

L'exemple traité dans ce paragraphe représente la difficulté essentielle de la démonstration du théorème 2.

Le compact isolé K de zéros de X est supposé être un ensemble analytique de dimension 2 ; remarquons que le champ de vecteur Y est non-nul et tangent à K . On en déduit facilement que K est homéomorphe à une famille finie de couronnes ou de rubans de Moebius recollés le long de leur bord.

Dans ce paragraphe, nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices, essentiellement sur les "recolllements" des couronnes.

i) on suppose donc que K est homéomorphe à un ensemble E construit de la façon suivante:

Notons C la couronne $[0, 1] \times S^1$; soit $k \in N$ et soient $C^i, i \in \{1, \dots, k\}$, k copies de C . On note $C_\varepsilon^i, \varepsilon \in \{0, 1\}$, les deux composantes du bord de C^i .

Soit $l \in N$, et soient $\gamma_j, j \in \{1, \dots, l\}$, l copies du cercle S^1 .

Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, on se fixe deux éléments distincts j_0 et j_1 de $\{1, \dots, l\}$, et on note $\varphi_{i,\varepsilon}$ l'application de C_ε^i sur γ_{j_ε} correspondant à l'identité de S^1 .

On suppose de plus que chaque $\gamma_j, j \in \{1, \dots, l\}$ est l'image d'au moins deux applications $\varphi_{i,\varepsilon}$.

L'ensemble E est le quotient

$$\left(\coprod_i C^i \right) \amalg \left(\coprod_j \gamma_j \right) / \varphi_{i,\varepsilon}, \quad i \in \{1, \dots, k\}, \varepsilon \in \{0, 1\}.$$

On suppose de plus que l'on a un voisinage isolant U de K tel que :

ii) pour tout $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, $K_\lambda = \text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U$ est homéomorphe à E , et $\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = \text{ind}(X, K)$.

iii) pour tout $\lambda \notin]-\lambda_0, \lambda_0[$, $\text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U = \emptyset$.

iv) l'union $\bigcup_\lambda K_\lambda = S \cap U$ est homéomorphe à $] -\lambda_0, \lambda_0[\times E$ (par un homéomorphisme préservant le paramètre λ).

v) on suppose que l'on a, pour chaque λ , une stratification de K_λ vérifiant les conditions a et b de Whitney et invariante par le flot Y , définie de la façon suivante:

- une strate de dimension 2 est l'intérieur d'une des couronnes C^i (considérée comme sous ensemble de $E \simeq K_\lambda$).

- une strate de dimension 1 est l'un des cercles γ_j (considéré comme sous ensemble de $E \simeq K_\lambda$).

vi) on suppose que l'on a une stratification de $S \cap U$ vérifiant les conditions a et b de Whitney, définie de la façon suivante (en utilisant l'homéomorphisme $S \cap U \simeq] -\lambda_0, \lambda_0[\times E$).

- une strate de dimension 3 est le produit par $] -\lambda_0, \lambda_0[$ de l'intérieur d'une couronne C^i .

- une strate de dimension 2 est un produit $] -\lambda_0, \lambda_0[\times \gamma_j$.

vii) on suppose que la fonction $f = -\frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle}$ est régulière sur U et que ses fibres sont transverses à toutes les strates de $S \cap U$.

viii) on suppose enfin que $\dim DL(X/Y, K) = 2$, et que $DL(X/Y, K - \bigcup_j \gamma_j)$ est défini par une section analytique $\sigma : K - \bigcup_j \gamma_j \rightarrow P|_{K - \bigcup_j \gamma_j}$

Le but de ce paragraphe est de prouver :

Lemme 2.e.1. *Avec les 8 hypothèses ci-dessus, il existe une section $s : K \rightarrow PN|_K$ disjointe de $DL(X/Y, K)$, et on a donc : $\text{ind}(X, K) = 0$.*

On va construire la section s d'abord au dessus des strates γ_j de dimension 1, et nous verrons comment étendre cette section au-dessus des couronnes C^i . Pour cela, nous allons faire le choix de trivialisations de $N|_{\gamma_j}$ et de $N|_{C^i}$ avec des règles de compatibilité entre ces trivialisations.

Définition 1. *Soit C^i une couronne de K et γ_j une strate de dimension 1 dans le bord de C^i . On dit qu'une trivialisation de $TM|_{\gamma_j}$ et une trivialisation de $TM|_{C^i}$ sont compatibles si le passage de l'une à l'autre se fait par une application linéaire indépendante du point de γ_j .*

Définition 2. *Soit C^i une couronne de K , et $] - \lambda_0, \lambda_0[\times C^i$ la partie correspondante de $S \cap U$. On dira qu'une trivialisation de $N|_{C^i}$ est bonne si, dans cette trivialisation les fibrés $(N \cap TC^i)|_{C^i}$ et $N \cap (T(C^i \times] - \lambda_0, \lambda_0[))|_{C^i}$ sont constants (c'est-à-dire que la fibre ne dépend pas du point de base).*

(On rappelle que les hypothèses v et vi (conditions de Whitney) entraînent que le fibré tangent à une strate se prolonge sur le bord de la strate, et qu'il contient l'espace tangent aux strates contenues dans le bord).

Définition 3. *Soit γ_j une strate de dimension 1 de K . On dira qu'une trivialisation de $N|_{\gamma_j}$ est bonne si tout sous-fibré vectoriel (localement trivial) de $N|_{\gamma_j}$, invariant par l'action du flot de Y sur N , est constant dans cette trivialisation.*

Lemme 2.e.2. *Soit C^i une couronne de K , et γ_j, γ_k les strates de dimension 1 composant le bord de C^i (d'après l'hypothèse i, γ_j et γ_k sont disjointes).*

Alors, pour tout couple (τ_j, τ_k) de bonnes trivialisations de $N|_{\gamma_j}$ et $N|_{\gamma_k}$, il existe une bonne trivialisation de $N|_{C^i}$ compatible avec τ_j et τ_k .

Démonstration. Choisissons une orientation de C^i , et de $C^i \times] - \lambda_0, \lambda_0[$ et de N . Soit $p \in \gamma_j$ on choisit une base $(X_1(p), X_2(p), X_3(p))$ de la fibre N_p de la façon suivante :

- $X_1(p)$ est orthogonal à Y et $(Y(p), X_1(p))$ est une base d'orientation positive de $(TC^i)|_p$.

- $X_2(p)$ est orthogonal à Y et $(Y(p), X_1(p), X_2(p))$ est une base d'orientation positive de $(T \times C^i)|_p$.

- $(X_1(p), X_2(p), X_3(p))$ est une base d'orientation positive de N_p .

Notons $X_1|_{\gamma_j}, X_2|_{\gamma_j}, X_3|_{\gamma_j}$ les champs de vecteurs définis sur γ_j , constants dans la trivialisation τ_j , et égaux à $X_1(p), X_2(p), X_3(p)$ en p .

Remarquons que $X_1|_{\gamma_j}$ est tangent à C^i , car $(TC^i)|_{\gamma_j} \cap N$ est invariant par l'action du flot de Y sur N donc est constant dans la trivialisation τ_j . De même $X_2|_{\gamma_j}$ est tangent à $] - \lambda_0, \lambda_0[\times C^i$.

On définit de façon analogue les champs $X_1|_{\gamma_k}, X_2|_{\gamma_k}$ et $X_3|_{\gamma_k}$.

Il suffit alors de choisir des champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 sur C^i formant en tout point une base de N , induisant par restriction au bord les champs $X_1|_{\gamma_j}, X_2|_{\gamma_j}, X_3|_{\gamma_j}$ et $X_1|_{\gamma_k}, X_2|_{\gamma_k}, X_3|_{\gamma_k}$, et tels que X_1 soit tangent à C^i et X_2 soit tangent à $] - \lambda_0, \lambda_0[\times C^i$.

Les champs (X_1, X_2, X_3) forment alors une trivialisation de $N|_{C^i}$, compatible avec les trivialisations τ_j et τ_k car leurs restrictions au bord sont constantes dans ces trivialisations.

Lemme 2.e.3. *Pour toute strate γ_j de dimension 1 de K , il existe une bonne trivialisation de $N|_{\gamma_j}$.*

Démonstration. Notons L l'application d'holonomie linéaire du flot de Y le long de γ_j , en un point $p \in \gamma_j$; c'est un isomorphisme linéaire de N_p .

Remarquons que L a toutes ses valeurs propres réelles et positives: en effet, soit C^i une couronne bordée par γ_j . Alors la demi-droite des vecteurs de N_p tangents à C^i et entrants dans C^i est invariante par L . De plus l'holonomie de Y le long de γ_j préserve le paramètre λ (c.a.d laisse invariant chacun des K_λ). Enfin L préserve l'orientation.

Rappelons qu'il existe un choix canonique d'un logarithme pour toute matrice réelle à valeurs propres toutes réelles positives. Notons \mathcal{L} le champ de vecteurs linéaire sur N_p défini par ce choix du logarithme de L , et notons $(\mathcal{L}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ son flot; on a $\mathcal{L}_1 = L$. De plus on vérifie facilement que le flot \mathcal{L}_t laisse invariant tout sous-espace de N_p invariant par L .

Notons L_t l'holonomie linéaire du flot de Y de la fibre N_p sur la fibre $N_{Y_t(p)}$. On a bien sûr $L_{t_0} = L$ où t_0 est la période de γ_j comme orbite périodique de Y .

Notons $A_t = L_t \circ \mathcal{L}_{-t/t_0}$: c'est un isomorphisme de N_p sur $N_{Y_t(p)}$ et A_{t_0} est l'identité de N_p .

La famille d'applications linéaires $(A_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définit un isomorphisme du fibré $N|_{\gamma_j}$ sur le fibré trivial $\gamma_j \times N_p$, et donc une trivialisatation de $N|_{\gamma_j}$ par choix d'une base de N_p . On vérifie facilement que cette trivialisatation est une bonne trivialisatation.

Nous pouvons à présent commencer la construction de la section s annoncée par le lemme 2.e.1:

Lemme 2.e.4. *Soit γ_j une strate de dimension 1 de K , τ_j une bonne trivialisatation de $N|_{\gamma_j}$, et $\pi : PN|_{\gamma_j} \rightarrow \mathbb{R}P^2$ la projection induite par cette trivialisatation.*

Alors la restriction de π à $DL(X/Y, \gamma_j)$ n'est pas surjective ($\pi(DL(X/Y, \gamma_j)) \neq \mathbb{R}P^2$).

Démonstration. En tout point $p \in \gamma_j$ la fibre $DL(X/Y, p)$ est un sous ensemble semi-analytique de dimension 1 de $\mathbb{R}P^2$ par l'identification de PN_p avec $\mathbb{R}P^2$ obtenue par la trivialisatation τ_j .

Soit C^i une couronne bordée par γ_j , et soit C^i la strate de dimension 3 de S qui lui correspond. Le fibré tangent à C^i se prolonge au point p : c'est un espace vectoriel de dimension 3, notons le $T_p(C^i)$. Alors, $T_p(C^i) \cap N_p$ est un plan invariant par l'action du flot de Y . Par définition d'une bonne trivialisatation, ce plan est donc constant (c-à-d indépendant de p) dans la trivialisatation τ_j . Notons C , le cercle $(\mathbb{R}P^1)$ de $\mathbb{R}P^2$ correspondant à ce plan.

Notons $B_p = DL(X/Y, p) - C$, et A_p son adhérence dans $\mathbb{R}P^2$. Bien sûr, B_p est un sous-ensemble semi-analytique de dimension 1 de $\mathbb{R}P^2$. Alors $A_p \cap C$ est égal à $A_p - B_p$, donc est le bord de B_p . On en déduit que $A_p \cap C$ est un ensemble semi-analytique de dimension 0 de $\mathbb{R}P^2$, donc est réduit à un nombre fini de points.

De la définition d'une bonne trivialisatation, et de l'invariance de $DL(X/Y, \gamma_j)$ par l'action du flot de Y , on déduit que $A_p \cap C$ est indépendant du point p .

Donc $\bigcup_{p \in \gamma_j} A_p$ est un compact dont l'intersection avec C est un nombre fini de points (puisque cette intersection est égale à $A_p \cap C$). Donc $\mathbb{R}P^2 - \bigcup_{p \in \gamma_j} A_p$ contient un ouvert non vide de $\mathbb{R}P^2$.

Or $\pi(DL(X/Y, \gamma_j))$ est inclus dans

$$C \cup \bigcup_{p \in \gamma_j} A_p, \text{ donc } \mathbb{R}P^2 - \pi(DL(X/Y, \gamma_j))$$

contient un ouvert non vide.

Corollaire 2.e.5. *Pour toute strate de dimension 1 γ_j de K , et toute bonne trivialisation τ_j de $N|_{\gamma_j}$, il existe une section $s_j : \gamma_j \rightarrow PN|_{\gamma_j}$ constante dans la trivialisation τ_j et d'image disjointe de $DL(X/Y, \gamma_j)$.*

Désormais, on se fixe, pour toute strate γ_j de dimension 1, une bonne trivialisation τ_j de $N|_{\gamma_j}$ et une section $s_j : \gamma_j \rightarrow PN|_{\gamma_j}$ constante dans la trivialisation τ_j et d'image disjointe de $DL(X/Y, \gamma_j)$. De plus, pour toute couronne C_i^i on se fixe une bonne trivialisation τ_i de $N|_{C_i^i}$ compatible avec les bonnes trivialisations τ_j et τ_k de $N|_{\gamma_j}$ et $N|_{\gamma_k}$ où γ_j et γ_k sont les composantes connexes du bord de C^i (une telle trivialisation τ_i existe d'après le lemme 2.e.2).

On conclut alors la démonstration du lemme 2.e.1 grâce au lemme suivant :

Lemme 2.e.6. *Soit C^i une couronne de K et soient γ_j, γ_k les composantes de son bord. Alors les sections s_j et s_k se prolongent en une section $s_i : C^i \rightarrow PN|_{C^i}$, disjointe de $DL(X/Y, C^i)$.*

Démonstration. Notons $\overset{\circ}{C}^i$ l'intérieur de C^i . D'après l'hypothèse viii, $DL(X/Y, \overset{\circ}{C}^i)$ est défini par une section $\sigma_i : \overset{\circ}{C}^i \rightarrow PN|_{\overset{\circ}{C}^i}$, invariante par l'action du flot de Y sur PN .

Montrons d'abord :

Lemme 2.e.7. *La section σ_i se prolonge sur le bord en une section $\bar{\sigma}_i : C^i \rightarrow PN|_{C^i}$, invariante par l'action du flot de Y sur PN .*

Démonstration du lemme 2.e.7. l'image de σ_i est un semi-analytique de PN de dimension 2, invariant par l'action du flot de Y ; son bord est donc un semi-analytique de dimension 1 invariant par l'action du flot de Y , et on vérifie facilement que la fibre est connexe, donc réduite à 1 point.

On montre alors :

Lemme 2.e.8. *L'application de C^i dans \mathbb{RP}^2 , induite par $\bar{\sigma}_i$ et par le choix de la bonne trivialisation τ_i , n'est pas surjective.*

Démonstration. (Elle est pratiquement identique à celle du lemme 2.d.1) :

Notons 0 le point de \mathbb{RP}^2 correspondant à la droite $(TC_i \cap N)|_{C^i}$, et C le cercle $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^2$ correspondant au plan $(TS \cap N)|_{C^i}$.

L'application σ_i n'est pas analytique, ni invariante par le flot de Y ; cependant, en utilisant le fait que $\sigma_i^{-1}(0)$ et $\sigma_i^{-1}(C)$ correspondent aux tangences de $DL(X/Y)$ avec C_i ou S , on montre facilement que $\sigma_i^{-1}(0)$ et $\sigma_i^{-1}(C)$ sont des sous-ensembles analytiques de $\overset{\circ}{C}^i$ dont l'adhérence est incluse dans les sous-

analytiques compacts $\bar{\sigma}_i^{-1}(0)$ et $\bar{\sigma}_i^{-1}(C)$, tous ces ensembles étant invariants par le flot de Y .

On en déduit :

- si $\dim \bar{\sigma}_i^{-1}(C) = 2$ alors $\dim \sigma_i^{-1}(C) = 2$, et comme $\sigma_i^{-1}(C)$ est analytique, $\sigma_i^{-1}(C) = \overset{\circ}{C}^i$, donc $\bar{\sigma}_i(C_i) \subset C$ donc $\bar{\sigma}_i$ n'est pas surjective.

- si $\dim \bar{\sigma}_i^{-1}(C) = 1$ alors $\bar{\sigma}_i^{-1}(C)$ est formé d'un nombre fini d'orbites périodiques de Y . Si γ est une telle orbite alors $\bar{\sigma}_i(\gamma)$ est un compact de C qui est, soit égal à 0, soit disjoint de 0. On en déduit facilement que tout point de C , différent de 0 mais assez proche de 0 est hors de l'image de $\bar{\sigma}_i$. Donc $\bar{\sigma}_i$ n'est pas surjective.

Fin de la démonstration du lemme 2.e.6. Choisissons un feuilletage en cercle de la couronne C^i , on notera $f_s, s \in [0, 1]$, les feuilles de ce feuilletage, $f_0 = \gamma_j, f_1 = \gamma_k$.

Les sections s_j et s_k sont constantes dans les bonnes trivialisations τ_j et τ_k : elles sont donc également constantes dans la trivialisation τ_i de $N|_{C^i}$, car τ_i est compatible avec τ_j et τ_k .

D'autre part les restrictions $\bar{\sigma}_i|_{\gamma_j}$ et $\bar{\sigma}_i|_{\gamma_k}$ sont des sections invariantes par l'action du flot de Y , donc sont constantes dans les trivialisations τ_j et τ_k parce que ce sont de bonnes trivialisations (voir définition). Elles sont donc également constantes dans la trivialisation τ_i (par compatibilité).

On montre alors facilement qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$, telle que $\alpha(0)$ est la valeur (constante) de s_j , $\alpha(1)$ est la valeur de s_k , telle que $\alpha|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]}$ est une fonction constante dont la valeur est un point de $\mathbb{R}P^2 - \bar{\sigma}_i(C^i)$, et tel que pour $t \in [0, \varepsilon]$ $\alpha(t) \in \mathbb{R}P^2 - \bar{\sigma}_i(\bigcup_{t \in [0, \varepsilon]} f_t)$ et pour $t \in [1 - \varepsilon, 1]$ $\alpha(t) \in \mathbb{R}P^2 - \bar{\sigma}_i(\bigcup_{t \in [1-\varepsilon, 1]} f_t)$. Il suffit pour cela de remarquer que pour ε petit $\bar{\sigma}_i(\bigcup_{t \in [0, \varepsilon]} f_t)$ est contenu dans un petit voisinage du point $\bar{\sigma}_i|_{\gamma_j}$, et qu'on peut joindre le point $s_j \neq \bar{\sigma}_i|_{\gamma_j}$ à un point de $\mathbb{R}P^2 - \bar{\sigma}_i(C^i)$ sans rencontrer ce voisinage de $\bar{\sigma}_i|_{\gamma_j}$.

La section s_i annoncée est alors définie par :

$$s_i|_{f(t)} = \alpha(t).$$

Ceci conclut la démonstration du lemme 2.e.6, et donc aussi du lemme 2.e.1.

f) Le cas général: démonstration du théorème 2.

Le but de ce paragraphe est de ramener le cas général, et donc le théorème 2, à

l'un des exemples (1,2 ou 3) déjà traités: ceci sera fait par une suite de lemmes dont les démonstrations seront l'objet des paragraphes g et h.

Rappelons que l'on a supposé $\text{Zéro}(Y) = \emptyset$. L'ensemble S des points où X et Y sont colinéaires est un sous-ensemble analytique de M de dimension ≤ 3 (le cas $\dim S = 4$ a déjà été traité au paragraphe 1.c).

Soit K un compact isolé de zéros de X , et soit U un voisinage isolant de K . Rappelons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $K_\lambda = \text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap U$. On choisit $\lambda_0 > 0$ assez petit pour que, pour tout $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, on ait les deux propriétés suivantes:

- $\text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap \partial U = \emptyset$.
- $\text{ind}(X + \lambda Y, U) = \text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = \text{ind}(X, K)$.

Pour prouver le théorème 2, on va montrer:

Il existe $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$ tel que $\text{ind}(X + \lambda Y, K_\lambda) = 0$

Pour cela on choisit λ de façon que K_λ soit "le plus régulier possible", et que le champ de plans P engendré par X et Y sur $M - S$ soit "le plus régulier possible" au voisinage de K_λ . C'est ce que permettent les trois lemmes de géométrie analytique réelle suivants:

Lemme 2.f.1. *Il existe un sous-ensemble analytique $A \subset S$ de M , de codimension ≥ 2 (donc $\dim A \leq 2$), tel que le champ de plans P engendré par X et Y sur $M - S$ se prolonge en un champ de plans analytique (encore noté P) sur $M - A$.*

Démonstration. Voir le paragraphe h).

On en déduit immédiatement:

$DL(X/Y, S - A)$ est défini par une section analytique $\sigma : S - A \rightarrow PN|_{S-A}$.

Lemme 2.f.2. *Il existe une stratification Σ de S par des ensembles semi-analytiques, vérifiant les hypothèses suivantes:*

- chaque strate de Σ est une sous-variété analytique lisse de M .
- la stratification Σ vérifie les conditions (a et b) de Whitney.
- Σ est invariante par le flot de Y (c'est-à-dire que Y est tangent à chacune des strates de Σ).
- le sous-ensemble analytique A est un sous-complexe de Σ .

Démonstration. Voir le paragraphe h).

On choisit alors λ grâce au lemme de transversalité de Thom [M], qui dans

ce contexte s'exprime de la façon suivante:

Lemme 2.f.3. *Il existe un ensemble fini $\Lambda \subset [-\lambda_0, \lambda_0]$ tel que, tout $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0] - \Lambda$ est valeur régulière de la restriction de la fonction analytique f (définie par $f = -\frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle}$) à un petit voisinage de l'adhérence \bar{U} de U , et $f^{-1}(\lambda) \cap U$ est une sous-variété lisse transverse à toutes les strates de Σ .*

Alors, d'après le théorème d'isotopie de Thom-Mather [M], on a:

Corollaire 2.f.4. *Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in [-\lambda_0, \lambda_0]$ tel que $[\lambda_1, \lambda_2] \subset [-\lambda_0, \lambda_0] - \Lambda$, et soit $\lambda_3 \in]\lambda_1, \lambda_2[$.*

Alors on a les propriétés suivantes:

i) $\bigcup_{\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[} K_\lambda = S \cap U \cap f^{-1}(]\lambda_1, \lambda_2[)$ est homéomorphe à $K_{\lambda_3} \times]\lambda_1, \lambda_2[$ par un homéomorphisme préservant le paramètre λ .

ii) La stratification Σ induit sur chaque K_λ , $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$, une stratification Σ_λ dont les strates de dimension i sont les composantes connexes des intersections des strates de dimension $i+1$ de Σ avec K_λ . La stratification Σ_λ vérifie les conditions de Whitney. La stratification Σ induit de même une stratification $\Sigma_{]\lambda_1, \lambda_2[}$ de $S \cap U \cap f^{-1}(]\lambda_1, \lambda_2[)$.

iii) Chaque strate de la stratification $\Sigma_{]\lambda_1, \lambda_2[}$ est le produit par $]\lambda_1, \lambda_2[$ d'une strate de Σ_{λ_3} , d'après l'identification :

$$\bigcup_{\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[} K_\lambda \cong K_{\lambda_3} \times]\lambda_1, \lambda_2[$$

Le choix annoncé d'un paramètre λ correspond à $\lambda = \lambda_3$ comme dans le corollaire ci-dessus.

Le théorème 2 est alors corollaire du lemme suivant:

Lemme 2.f.5. *Pour toute composante connexe $K_{\lambda_3}^i$ de K_{λ_3} , il existe un voisinage V de $K_{\lambda_3}^i$ dans M , et un revêtement fini $\Pi: \bar{V} \rightarrow V$, tel que les champs $\Pi^*(X + \lambda_3 Y)$ et $\Pi^*(Y)$ vérifient, au voisinage de $\Pi^{-1}(K_{\lambda_3}^i)$, les hypothèses de l'un des exemples 1, 2 ou 3 des paragraphes 2.c, 2.d ou 2.e.*

En effet on a alors $\text{ind}(\Pi^*(X + \lambda_3 Y), \Pi^{-1}(K_{\lambda_3}^i)) = 0$, et donc $\text{ind}(X + \lambda_3 Y, K_{\lambda_3}^i) = 0$ pour toute composante connexe $K_{\lambda_3}^i$ de K_{λ_3} . Donc $\text{ind}(X + \lambda_3 Y, K_{\lambda_3}) = 0$, ce qui conclut le théorème 2.

Démonstration du lemme 2.f.5. Commençons par simplifier les notations:

- Quitte à changer le couple (X, Y) de champs commutants par le couple $(X + \lambda_3 Y, Y)$, on supposera désormais $\lambda_3 = 0$.

- Le lemme f.5 concernant les composantes connexes de $K = K_0$, quitte à restreindre l'ouvert U à un voisinage d'une composante connexe de K , on supposera désormais K connexe.

- Tout sous-ensemble analytique compact d'une variété, défini par une seule équation, possède un voisinage muni d'une rétraction sur ce sous-ensemble analytique (voir par exemple [Lo]). L'ensemble K est défini par l'équation $\langle X, X \rangle = 0$, donc vérifie cette propriété. Quitte à restreindre le voisinage U de K on supposera désormais que U se rétracte sur K : ainsi tout revêtement $\Pi : \tilde{K} \rightarrow K$ s'étend en un revêtement $\Pi : \tilde{U} \rightarrow U$.

- Quitte à choisir $\lambda_0 > 0$ plus petit, on supposera que $\lambda_1 = -\lambda_0$ et $\lambda_2 = \lambda_0$, ce qui revient à supposer $\Lambda = \emptyset$ dans les notations du lemme f.3 .

- On note alors $V = U \cap f^{-1}(]-\lambda_0, \lambda_0[)$, et on notera Σ_V la stratification de $S \cap V$ induite par Σ .

Avec ces conventions, on a les propriétés suivantes:

- Pour tout $\lambda \notin]-\lambda_0, \lambda_0[$, $\text{Zéro}(X + \lambda Y) \cap V = \emptyset$.
 - Pour tout $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, K_λ est homéomorphe à K et $S \cap V = \bigcup_{\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[} K_\lambda$ est homéomorphe à $K \times]-\lambda_0, \lambda_0[$ par un homéomorphisme préservant le paramètre λ .

- $\dim S \leq 3$. On en déduit $\dim K \leq 2$.

- La stratification Σ_0 de K est invariante par le flot de Y .

On en déduit:

- Σ_0 ne possède pas de strate de dimension 0.
 - Toute strate de dimension 1 de Σ_0 est une orbite périodique du champ de vecteurs Y .

- Toute strate de dimension 2 de Σ est une surface lisse difféomorphe à une couronne ouverte, ou à un ruban de Möbius ouvert, ou à un tore T^2 , ou à une bouteille de Klein.

- Toute strate de la stratification Σ_V de $S \cap V$ est le produit par $]-\lambda_0, \lambda_0[$ d'une strate de Σ_0 , par l'identification $S \cap V \cong K_0 \times]-\lambda_0, \lambda_0[$.

- L'ensemble A est un sous-complexe de dimension inférieure à 2 de la stratification Σ . Donc $A \cap K$ est une union finie (et éventuellement vide) de strates de dimension 1. Donc $A \cap V$ est une union de strates de dimension 2 de Σ_V .

- Pour tout $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, λ est une valeur régulière de l'application $f = -\frac{\langle X, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle}$ au voisinage de \bar{V} , et $f^{-1}(\lambda) \cap V$ est une variété lisse trans-

verse à toutes les strates de Σ_V .

Distinguons 3 cas:

1^{er} cas: $\dim K = 1$. Alors K_λ est une orbite périodique de Y , pour tout $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$, et $S \cap V$ est une couronne lisse. Les champs X et Y vérifient donc sur V les hypothèses de l'exemple 1, et donc $\text{ind}(X, K) = 0$.

2^{ème} cas: $\dim K = 2$ et la stratification Σ_0 de K ne possède qu'une seule strate. Dans ce cas, K est difféomorphe au tore T^2 ou à la bouteille de Klein. Quitte à passer à un revêtement à deux feuillet de V , on peut supposer que K (ainsi que chaque K_λ , $\lambda \in]-\lambda_0, \lambda_0[$) est un tore T^2 lisse.

Alors $S \cap V$ est difféomorphe à $T^2 \times]-\lambda_0, \lambda_0[$, et quitte à passer à un revêtement à deux feuillet de V on peut supposer que $S \cap V$ est transversalement orienté.

Enfin, $A \cap K$ est union de strates de dimension 1 de Σ_0 , mais par hypothèse Σ_0 n'a pas de strates de dimension 1, donc $A \cap K = \emptyset$, ce qui se traduit par:

$DL(X/Y, K)$ est défini par une section analytique $\sigma : K \rightarrow PN|_K$.

Toutes les hypothèses de l'exemple 2 sont alors vérifiées.

3^{ème} cas: $\dim K = 2$ et la stratification Σ_0 possède au moins deux strates.

Lemme 2.f.6. *Il existe un revêtement fini $\Pi : \tilde{K} \rightarrow K$ tel qu'on ait les propriétés suivantes:*

- Notons γ_j , $j \in \{1, \dots, l\}$, les composantes connexes des images réciproques par Π des strates de dimension 1 de Σ_0 .

- Notons C_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, les adhérences dans \tilde{K} des composantes connexes des images réciproques par Π des strates de dimension 2 de Σ_0 .

Alors les C_i sont difféomorphes à la couronne fermée $S^1 \times [0, 1]$, et \tilde{K} est obtenu en recollant les couronnes C_i le long de leur bord, avec les cercles γ_j , selon les règles de recollement décrites par l'hypothèse i de l'exemple 3.

Démonstration. La démonstration du lemme 2.f.6 est l'objet du paragraphe g).

On étend alors le revêtement Π en un revêtement $\Pi : \tilde{V} \rightarrow V$, et on vérifie facilement que les champs $\tilde{X} = \Pi^*(X)$ et $\tilde{Y} = \Pi^*(Y)$ vérifient toutes les hypothèses de l'exemple 3. On en déduit $\text{ind}(\tilde{X}, \tilde{K}) = 0$ et donc $\text{ind}(X, K) = 0$.

Pour achever la démonstration du théorème 2, il reste donc à démontrer les

lemmes f.1, f.2 et f.6 .

g) Démonstration du lemme f.6: construction d'un revêtement fini de K

Le compact K est a priori obtenu en recollant le long de leur bord des couronnes et des rubans de Möbius, ces recollements n'étant pas a priori des difféomorphismes du cercle, mais des revêtements finis.

Le but de ce paragraphe est de montrer comment simplifier la géométrie de K par un revêtement fini \tilde{K} , qui sera obtenu comme recollement de couronnes, le long de leur bord, par des homéomorphismes vérifiant l'hypothèse i de l'exemple 3.

Exercice. Soit W le compact obtenu comme quotient de la couronne $[0, 1] \times S^1$ par un revêtement à deux feuillets de $\{1\} \times S^1$ par $\{0\} \times S^1$. Alors aucun revêtement fini de W ne vérifie l'hypothèse i de l'exemple 3.

L'exercice ci-dessus montre qu'il y a des obstructions à l'existence du revêtement \tilde{K} annoncé: il y a bien quelque chose à démontrer!

On va procéder par simplifications successives:

Etape 1. Quitte à passer à un revêtement à 2 feuillets de V , on peut supposer que le champ Y est transversalement orienté.

Etape 2.

Lemme 2.g.1. : *Quitte à passer à un revêtement à deux feuillets de V , on peut supposer que chaque strate de Σ_0 est munie d'une orientation de façon que, pour chaque strate γ_j de dimension 1 contenue dans le bord d'une strate C_i de dimension 2, l'orientation de γ_j soit celle héritée comme bord de C_i .*

Démonstration. C'est le classique revêtement des orientations d'une variété. Il faut juste voir que la relation de compatibilité que l'on impose permet bien de définir 2 feuillets au voisinage d'un point d'une strate de dimension 1.

On déduit immédiatement du lemme g.1 le fait que désormais les strates de dimension 2 de Σ_0 sont des couronnes, et non des rubans de Möbius.

Etape 3. On munit facilement K d'un feuilletage \mathcal{F} de dimension 1, dont toutes les feuilles sont des cercles, et tel que les strates de dimension 1 soient des feuilles de \mathcal{F} : en effet, il suffit de feuilletter en cercles chacune des strates de dimension 2.

Alors, quitte à passer au revêtement des orientations de \mathcal{F} , on peut supposer que \mathcal{F} est orientable.

Corollaire 2.g.2. Avec l'hypothèse ci-dessus, chaque strate de dimension 2 de Σ_0 possède dans son bord deux strates de dimension 1 distinctes.

Démonstration. Si une strate γ de dimension 1 est dans le bord d'une couronne C , son orientation donnée par le lemme g.1 sera compatible ou contraire à celle de \mathcal{F} suivant que les chemins dans C , transverses à \mathcal{F} et atteignant γ coupent \mathcal{F} suivant une orientation positive ou négative: ce qui entraîne que γ borde la couronne C "d'un seul côté".

D'après le corollaire g.2, l'ensemble K est homéomorphe à un ensemble E obtenu de la façon suivante:

- Soit $k \in N$ et soient C^i , $i \in \{1, \dots, k\}$, k copies de la couronne $C = [0, 1] \times S^1$. Notons C_ε^i , $\varepsilon \in \{0, 1\}$, les deux composantes du bord de C^i , munies de l'orientation de S^1 (et non celle induite comme bord de C^i).

- Soit $l \in N$ et soient γ_j , $j \in \{1, \dots, l\}$, l copies du cercle S^1 .

- Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, on se fixe deux éléments distincts j_0 et j_1 de $\{1, \dots, l\}$, et on choisit un revêtement fini $\varphi_{i,\varepsilon}$ préservant l'orientation de S^1 , de C_ε^i sur γ_{j_ε} .

- On suppose de plus que chaque γ_j , $j \in \{1, \dots, l\}$ est l'image d'au moins un revêtement $\varphi_{i,\varepsilon}$.

L'ensemble E est le quotient:

$$\left(\coprod_i C^i \right) \amalg \left(\coprod_j \gamma_j \right) / \varphi_{i,\varepsilon}, \quad i \in \{1, \dots, k\}, \quad \varepsilon \in \{0, 1\}.$$

La différence essentielle avec l'hypothèse i annoncée est que les $\varphi_{i,\varepsilon}$ sont ici des revêtements et non pas des homéomorphismes.

Etape 4.

Lemme 2.g.3. Avec les notations ci-dessus: soit γ une strate de dimension 1 de Σ_0 et soient $\varphi_1 = \varphi_{1,\varepsilon}$ et $\varphi_2 = \varphi_{2,\varepsilon}$ des revêtements (de recollement de strates de dimension 2) d'images γ . Alors le nombre de feuillettes du revêtement φ_1 est égal à celui de φ_2 .

Démonstration. γ est une orbite du champ Y . Soit Δ une transversale du champ Y coupant γ en un et un seul point p . La transversale Δ coupe transversalement chaque strate C^i de dimension 2 s'appuyant sur γ , et la strate C^i induit sur Δ des segments d'extrémité p , dont le nombre est égal au nombre de feuillettes du revêtement $\varphi_{i,\varepsilon}$ de γ .

Notons P l'application de premier retour de Poincaré du champ Y sur Δ . Le champ Y étant tangent à K , P laisse globalement invariant $K \cap \Delta$: donc P induit une permutation sur l'ensemble de segments d'extrémité p qui composent $K \cap \Delta$. On vérifie facilement que la période, pour cette permutation, d'un segment obtenu par intersection de C^i avec Δ , est égale au nombre de feuillettes du revêtement $\varphi_{i,\varepsilon}$ de γ . Pour prouver le lemme g.3, il suffit donc de prouver le lemme suivant:

Lemme 2.g.4. *La permutation induite par P sur l'ensemble des segments composant $K \cap \Delta$ est une puissance d'une permutation cyclique.*

Démonstration. La transversale Δ est un disque D^3 . Rappelons que la stratification Σ de $S \cap V$ est le produit par $] -\lambda_0, \lambda_0[$ de la stratification Σ_0 de K . On en déduit que $S \cap \Delta$ est, au moins au voisinage du point p , le produit par un segment $[-\lambda, \lambda]$ de $K \cap \Delta$. C'est-à-dire qu'à chaque segment de $K \cap \Delta$ d'origine p correspond une surface à bord, homéomorphe au demi-plan, dont le bord est le segment I , intersection de Δ et de la strate de dimension 2 de Σ passant par p (voir la figure).

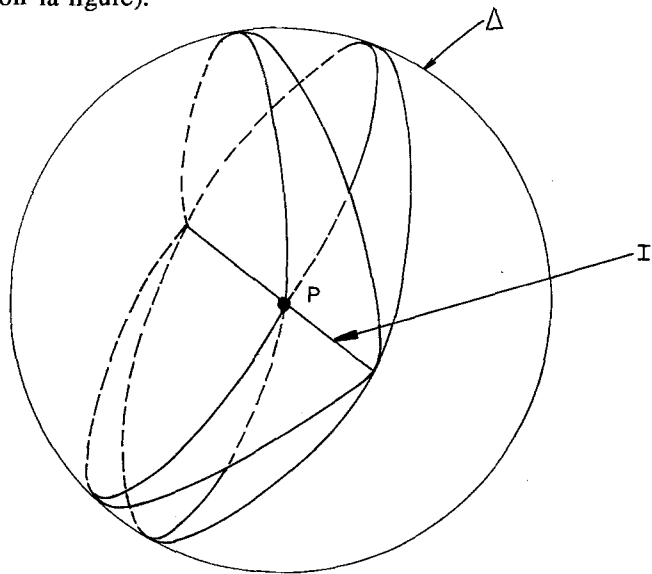


Figure 1

L'application P induit une permutation des strates de dimension 2 de $S \cap \Delta$ qui coïncide bien sûr avec la permutation induite sur les strates de dimension 1 de $K \cap \Delta$.

L'ensemble des strates de dimension 2 de $S \cap \Delta$ possède un ordre cyclique

naturel: en effet ce sont des sous-variétés de codimension un disposées "en livre ouvert" sur une sous-variété de codimension 2.

L'application P étant égale à l'identité sur le segment I , et préservant l'orientation, la permutation induite par P préserve cet ordre cyclique et est donc égale à une puissance d'une permutation cyclique: ceci achève la démonstration du lemme g.4, et donc aussi celle du lemme g.3.

Corollaire 2.g.5. *Il existe une action $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de \mathbb{R} sur K , dont les orbites sont les feuilles de \mathcal{F} (donc sont toutes périodiques), et dont les orbites contenues dans les strates de dimension 2 de Σ_0 sont de plus petite période égale à 1.*

Démonstration. On construit d'abord l'action sur les strates γ de dimension 1, de façon compatible avec l'orientation du feuilletage \mathcal{F} , telle que γ soit de période $\frac{1}{k}$, où k est le nombre de feuillets des revêtements $\varphi_{i,\varepsilon}$ ayant γ comme image. On étend alors cette action, couronne par couronne.

Fin de la démonstration du lemme 2.f.6. On construit d'abord ce qu'on pourrait appeler une transversale complète T du feuilletage \mathcal{F} : c'est un compact rencontrant chaque feuille de \mathcal{F} en un et un seul point, et dont l'intersection avec chaque couronne est un segment transverse à \mathcal{F} . On construit T très facilement: pour chaque strate γ de dimension 1 on choisit un point $p(\gamma) \in \gamma$; si C est une couronne de bord $\gamma \cup \gamma'$, on joint les points $p(\gamma)$ et $p(\gamma')$ par un segment transverse à \mathcal{F} dans C .

Notons k le ppcm des nombres de feuillets des revêtements $\varphi_{i,\varepsilon}$. Alors toute orbite de l'action $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ a comme plus petite période un multiple entier de $\frac{1}{k}$. Pour tout point $x \in K$, l'ensemble $\theta(x) = \{t \in \mathbb{R} / Z_t(x) \in T\}$ est non vide (car T rencontre toute orbite de l'action), et si t_1 et t_2 sont deux éléments de $\theta(x)$, alors $t_1 - t_2$ est un multiple entier de la période de x (car T ne rencontre l'orbite de x qu'en un seul point): on en déduit que la projection de $\theta(x)$ sur $\mathbb{R}/\frac{1}{k}\mathbb{Z}$ est un unique point noté $t(x)$. L'application $t : K \rightarrow \mathbb{R}/\frac{1}{k}\mathbb{Z}$ ainsi définie est évidemment continue.

On note alors $\Pi : \tilde{K} \rightarrow K$ le revêtement obtenu en tirant en arrière par t le revêtement cyclique à k feuillets de $\mathbb{R}/\frac{1}{k}\mathbb{Z}$ par \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On vérifie facilement que \tilde{K} est alors obtenu en recollant les couronnes \tilde{C}^i , composantes connexes des $\Pi^{-1}(C^i)$, aux cercles $\tilde{\gamma}_j$ par des difféomorphismes $\tilde{\varphi}_{i,\varepsilon}$.

Une seule des hypothèses contenues dans l'hypothèse i reste encore à montrer: c'est que chaque strate $\tilde{\gamma}_j$ est le bord d'au moins deux couronnes \tilde{C}^i . Pour

cela, choisissons un disque D analytique de dimension 2 inclus dans $f^{-1}(0)$ et transverse à $\tilde{\gamma}_j$ au point p . Alors $\tilde{K} \cap D$ est un sous-ensemble analytique de dimension 1 de D et chaque couronne s'appuyant sur $\tilde{\gamma}_j$ induit exactement une branche arrivant en p .

On sait qu'en tout point d'un sous-ensemble analytique de dimension 1 du plan arrive un nombre pair de branches, donc il arrive au moins deux branches en p , ce qui conclut.

h) Démonstration des lemmes 2.f.1 et 2.f.2 : existence d'une stratification.

Démonstration du lemme f.1. Prolonger le champ de plans engendré par X et Y est équivalent à prolonger le champ de droites engendré par X/Y .

Le lemme f.1 est donc un corollaire du lemme de division locale suivant:

Lemme 2.h.1. *Soit Z un champ de vecteurs analytique sur une variété \mathbb{R} -analytique V . Soit $p \in \text{Zéro}(Z)$.*

Il existe un voisinage U_p de p et une fonction analytique $f : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{1}{f}Z$ soit un champ de vecteurs analytique défini sur U_p et que:

$$\text{codim}(\text{Zéro}(\frac{1}{f}Z)) \geq 2$$

Démonstration. C'est la version réelle d'un lemme classique de géométrie analytique complexe: l'anneau des germes en p de fonctions analytiques est factoriel, ce qui permet de diviser le champ Z (ou du moins son complexifié) par un pgcd de ses fonctions coordonnées. On obtient ainsi un nouveau champ \tilde{Z} dont les fonctions coordonnées (dans une carte au voisinage de p) sont sans facteurs communs, ce qui se traduit par le fait que $\text{Zéro}(\tilde{Z})$ est de codimension ≥ 2 .

Démonstration du lemme f.2. nous allons montrer:

Lemme 2.h.2. *Soit V une variété \mathbb{R} -analytique et Y un champ de vecteurs \mathbb{R} -analytique non nul sur V . Soit S un sous-ensemble analytique de V de dimension $\dim S \leq 3$, tel que S soit invariant par le flot de Y . Alors S possède une stratification de Whitney Σ par des sous-ensembles semi-analytiques invariants par le flot de Y .*

Si de plus $A \subset S$ est un sous-ensemble analytique de dimension $\dim A \leq 2$, et invariant par le flot de Y , alors on peut choisir Σ de façon que A soit un sous-complexe de Σ .

Démonstration. Rappelons qu'un sous-ensemble analytique E de dimension ≤ 2 possède une stratification de Whitney canonique (la plus grossière):

En effet, un point x de E est sur une strate de dimension 2 si E est une surface lisse au voisinage de x . Notons Σ_2 l'ensemble de ces points: une strate de dimension 2 est une composante connexe de Σ_2 . De plus $E - \Sigma_2$ est un sous-ensemble analytique de dimension ≤ 1 ; on notera: $\Sigma_{\leq 1} = E - \Sigma_2$.

Un point $y \in \Sigma_{\leq 1}$ est une strate de dimension 0 si $\Sigma_{\leq 1}$ n'est pas une courbe lisse au voisinage de y , ou si $\Sigma_{\leq 1}$ est une courbe lisse au voisinage de y mais que la condition b de Whitney n'est pas vérifiée en y (avec les strates de dimension 2). L'ensemble de ces points est discret, donc analytique: on le note Σ_0 . Une strate de dimension 1 est alors une composante connexe de $\Sigma_1 = \Sigma_{\leq 1} - \Sigma_0$. On vérifie facilement que l'on a ainsi défini une stratification de Whitney

Pour prouver le lemme h.2, on construit d'abord des stratifications de S dans des flow-box de Y , et nous les recollons en une stratification de S .

Soit $B \cong D \times I$ un flow-box de Y : c'est-à-dire que D est un disque analytique, de codimension 1 dans V et transverse à Y , que I est un intervalle de \mathbb{R} muni de la coordonnée t de façon que $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ sur B . Alors $S \cap B$ est le produit par l'intervalle I d'un sous-ensemble analytique de dimension 2 de D (car S est invariant par le flot de Y): ceci permet de munir canoniquement $S \cap B$ d'une stratification de Whitney $\Sigma(B)$ par produit par I de la stratification canonique de $S \cap D$. Notons $\Sigma_i(B)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, l'union des strates de dimension i de $\Sigma(B)$. De l'invariance de S par le flot de Y , on déduit que si B_1 et B_2 sont deux flow-box de Y , alors:

$$\Sigma_i(B_1) \cap B_2 = \Sigma_i(B_2) \cap B_1, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

On obtient donc une partition $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ de S définie par:

$$\Sigma_i = \bigcup_B \Sigma_i(B)$$

où B parcourt l'ensemble des flow-box de Y .

La stratification de Whitney Σ de S , invariante par le flot de Y , est définie par: une strate de dimension i de Σ , $i \in \{1, 2, 3\}$, est une composante connexe de Σ_i .

On a ainsi montré la première partie du lemme h.2.

Pour la seconde partie, raffiner Σ de façon que A soit un sous-complexe ne présente aucune difficulté: comme pour la première partie on utilise l'invariance

par le flot de Y pour diminuer de 1 les dimensions.

Ceci conclut la preuve du lemme 2.h.2, et donc du théorème 2.

Bibliographie

- [B.M] E.Bierstone & P.Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n°67 (1988), p. 1 - 42.
- [B.1] C.Bonatti, *Un point fixe commun pour des difféomorphismes de S^2* , Annals of Maths, 129 (1989), p. 61-69.
- [B.2] C.Bonatti, *Difféomorphismes commutants des surfaces et stabilité des fibrations en tores*, Topology, vol 29 n°1 (1990), p. 101-126.
- [G] H.Grauert, *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds*, Annals of Maths, n°68 (1958), p. 460-472.
- [H] M.Handel, *Commuting homeomorphisms of S^2* , to appear in Topology.
- [L] E.Lima, *Common singularities of vector fields on 2-manifolds*, Comment. Math. Helvetici, 39 (1964), p. 97-110.
- [Lo] Lojasiewicz, *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels*, Coll. du CNRS sur les équations aux dérivées partielles, Paris (1962) p.87-89.
- [M] J.Mather, *Stratifications and mappings*, Dynamical Systems, M.M.Peixoto, Academic Press (1973), p. 195-223.
- [M.T.1] P.Molino & F.J.Turiel, *Une observation sur les actions de \mathbb{R}^p sur les variétés compactes de caractéristique non nulle*, Comment. Math. Helvetici, 61 (1986), p. 370-375.
- [M.T.2] P.Molino & F.J.Turiel, *Dimension des orbites d'une action de \mathbb{R}^p sur une variété compacte*, Comment. Math. Helvetici, 63 (1988), p. 253-258.

Christian Bonatti
Chargé de recherches au C.N.R.S.
Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
Laboratoire de Topologie, URA 755
B.P 138
21004 Dijon Cedex France.
Email: Bonatti at FRCCUB11.BITNET